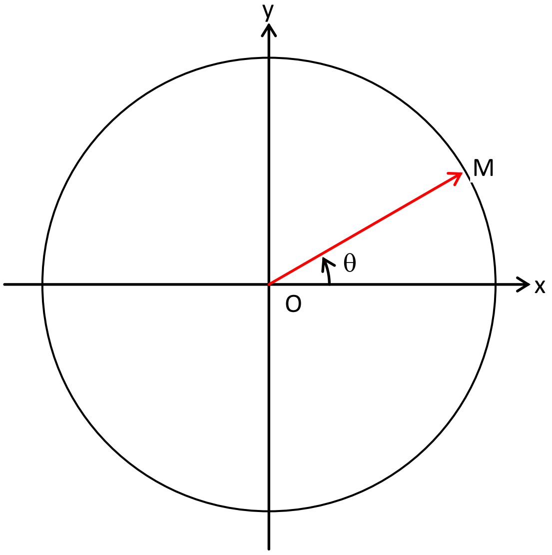
CINEMATIQUE D'UN MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME



I- Contexte, données et définitions :

On observe un point M qui se déplace sur un cercle de rayon R avec une vitesse de valeur V constante.

On désigne par O le centre de ce cercle et on choisit deux axes orthogonaux Ox et Oy pour repérer le point mobile.

Plus précisément, on choisit l'axe Ox de manière à ce que le point mobile M se trouve sur cet axe à l'instant origine t = 0 où l'on déclenche le chronomètre.

On note θ, l'angle dont a tourné le point M entre l'instant initial et l'instant t considéré.

Le mouvement du point M est périodique. On note T, la durée d'un tour complet, période du mouvement.

Le mouvement étant uniforme, la période T vérifie la relation : $\boxed{V = \frac{2.\pi.R}{T}}$ ou encore $T = \frac{2.\pi.R}{V}$

On peut également définir la fréquence f du mouvement par $\boxed{f \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{T} = \frac{V}{2.\pi.R}}$

La vitesse angulaire ω (aussi appelée pulsation) du mouvement est liée à la période T par :

$$\boxed{\omega \overset{\text{déf}}{=} \frac{2.\pi}{T} = 2.\pi.f}$$

Cette quantité s'exprime numériquement en $rd.s^{-1}$ dans le système international d'unités. On peut également l'exprimer en tours par seconde ($tr.s^{-1}$) : 1 $tr.s^{-1}$ valant environ 6,28 $rd.s^{-1}$.

Le caractère circulaire et uniforme du mouvement se traduit par le caractère linéaire de la relation entre l'angle θ et l'instant t : $\theta = \omega.t$

On remarque que les vitesses linéaires et angulaires sont reliées : $V = \frac{2.\pi.R}{T} = R.\frac{2.\pi}{T} = R.\omega$

Autrement dit, plus l'objet est loin de l'axe de rotation et plus la période est courte, plus l'objet se déplace vite.

II- Coordonnées du vecteur position du point M à un instant donné :

L'angle, noté θ, dont a tourné le vecteur $\overrightarrow{OM}$ depuis l'instant t = 0 est une fonction linéaire du temps puisque le mouvement est uniforme : $\boxed{\theta(t) = \omega.t}$

Remarque : cette relation exprime notamment qu'au bout d'une période, le point mobile a tourné d'un angle égal à $\omega.T$ c'est-à-dire $2.\pi$. Qu'au bout de 2 périodes, le point mobile a tourné d'un angle égal à $\omega.2T$ c'est-à-dire $4.\pi$ etc.

On en déduit l'expression des coordonnées du vecteur position défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x_M(t) = R.\cos(\theta) = R.\cos(\omega.t) \\ y_M(t) = R.\sin(\theta) = R.\sin(\omega.t) \end{array}\right.}$$

Remarques :

- Dans la suite, pour simplifier l'écriture et comme il n'y a pas d'ambigüités à craindre, on notera les fonctions $x_M(t)$ et $y_M(t)$ simplement x et y

- On vérifie aisément que la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est constante et vaut bien R :

$$\forall t,\ \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(R.\cos\theta)^2 + (R.\sin\theta)^2} = \sqrt{R^2.(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = R$$

III- <u>Coordonnées du vecteur vitesse du point M à un instant donné</u> :

Le vecteur vitesse $\vec{V}$ est défini dans tout mouvement par $\vec{V} \overset{\text{déf}}{=} \left(\overrightarrow{OM}\right)' \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

Ici, ce vecteur a pour coordonnées :

$$\boxed{\vec{V}\left|\begin{array}{l} V_x \overset{\text{déf}}{=} x' = (R.\cos(\omega.t))' = -R.\omega.\sin(\omega.t) \\ V_y \overset{\text{déf}}{=} y' = (R.\sin(\omega.t))' = R.\omega.\cos(\omega.t) \end{array}\right.}$$

Remarques :

- La norme de ce vecteur est bien constante et vaut V :

$$\forall t,\ \left\|\vec{V}\right\| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} = \sqrt{(-R.\omega.\sin\theta)^2 + (R.\omega.\sin\theta)^2} = \sqrt{(R.\omega)^2.(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = R.\omega = V$$

- On constate que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux. Pour le vérifier, il suffit d'établir la nullité du produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{OM}.\vec{V} = x.x' + y.y' = R.\cos(\omega.t).(-R.\omega).\sin(\omega.t) + R.\sin(\omega.t).(+R.\omega).\cos(\omega.t)$$
$$= R^2.\omega.[\sin(\omega.t).\cos(\omega.t) - \sin(\omega.t).\cos(\omega.t)] = 0$$

IV- <u>Coordonnées du vecteur accélération du point M à un instant donné</u> :

Le vecteur vitesse $\vec{a}$ est défini dans tout mouvement par $\vec{a} \overset{\text{déf}}{=} \left(\vec{V}\right)' \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

Ici, ce vecteur a pour coordonnées :

$$\boxed{\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \overset{\text{déf}}{=} (V_x)' \overset{\text{déf}}{=} x'' = (R.\omega.\sin(\omega.t))' = -R.\omega^2.\cos(\omega.t) = -\omega^2.x \\ a_y \overset{\text{déf}}{=} (V_y)' \overset{\text{déf}}{=} y'' = (R.\omega.\cos(\omega.t))' = -R.\omega^2.\sin(\omega.t) = -\omega^2.y \end{array}\right.}$$

Remarques :

- Le vecteur à est colinéaire et de sens opposé au vecteur position. Puisque $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = -\omega^2.x \\ a_y - \omega^2.y \end{array}\right.$

On peut donc écrire $\boxed{\vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}}$

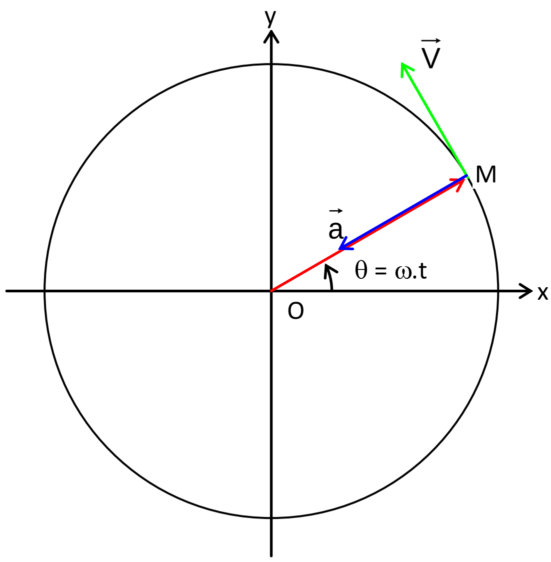
- La norme du vecteur accélération est constante et vaut :

$$\forall t,\ \left\|\vec{a}\right\| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{(-\omega^2.x)^2 + (-\omega^2.y)^2} = \sqrt{\omega^4.(x^2+y^2)} = R.\omega^2 = R.V$$

- Ainsi, contrairement à une idée reçue très répandue, un objet en mouvement circulaire uniforme possède une accélération (du simple fait que la <u>direction</u> du vecteur vitesse change sans arrêt, même si la norme reste constante).

La valeur de cette accélération peut être très importante. Par exemple, pour R = 10 m et ω = 1 tour.s^{-1} :
a = 10 m. (2.π rd.s^{-1})^2 = 4.10^2 m.s^{-2} soit près de 40 fois l'accélération d'un corps qui tombe en chute libre au voisinage du sol terrestre !

En résumé, voici un schéma qui illustre la direction, le sens de chacun des trois vecteurs (position, vitesse et accélération) :



Remarques :

- la longueur des flèches qui représentent les vecteurs vitesse et accélération est arbitraire dans ce dessin .

- Par ailleurs, comparer la longueur des trois flèches n'aurait aucun sens (il s'agit de vecteurs dont les normes ne s'expriment pas dans la même unité !)

